DOI:10.13338/j.issn.1006-8341.2011.03.027

第 24 卷第 3 期 纺 织 高 校 基 础 科 学 学 报 Vol. 24, No. 3
2011 年 9 月 BASIC SCIENCES JOURNAL OF TEXTILE UNIVERSITIES Sept., 2011

文章编号:1006-8341(2011)03-0390-04

2 个 Smarandache LCM 函数的混合均值估计

黄 炜

(宝鸡职业技术学院 基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘要:研究了 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 与 r 角形数函数 $u_r(n)$ 和 $v_r(n)$ 的混合均值问题. 利用初等方法和解析方法,给出了 2 个有趣的渐近公式,发展了 F. Smarandache 教授在《Only Problems, Not Solution》中涉及的相关研究工作.

关键词: Smarandache LCM 函数; r 角形数; 均值; 渐近公式

中图分类号:O 156.4 **文献标识码:**A

1 引言及结论

$n \in \mathbf{N}$,著名的 F. Smarandache LCM 函数 $SL(n)$[1] 定义为最小的正整数 k,使得 n 整除 $[1,2,3,\cdots,k]$,其中 $[1,2,3,\cdots,k]$ 表示 $1,2,3,\cdots,k$ 的最小公倍数. 例如 $SL(n)$ 的前几个值是 $SL(1)=1, SL(2)=2, SL(3)=3, SL(4)=4, SL(5)=5, SL(6)=3, SL(7)=7, SL(8)=8, SL(9)=9, SL(10)=5, SL(11)=11, SL(12)=4, SL(13)=13, SL(14)=7, SL(15)=5, SL(16)=16,\cdots$,由 $SL(n)$ 的定义容易推出当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准分解式,那么

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}. \tag{1}$$

关于 $SL(n)$ 的性质有不少的学者进行了研究,取得了一系列有趣且十分重要的结果[2-7],对于任意素数 p, $SL(p)=S(p)$,其中 $S(n)$ 为 F. Smarandache 函数,同时解决了当 $n=12$ 或 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$ 时 $SL(n)=S(n)$, $S(n)\neq n$,其中 $p>p_i^{\alpha_i}$, $i=1,2,3,\cdots,r$,并且还得到 $\forall k\in\mathbf{N}_+$, $k>2$,有

$$\sum_{n\leqslant x}SL(n)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{x^2}{\ln x}+\sum_{i=2}^{k}\frac{c_i x_i^2}{\ln^{k+1}x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right).$$

文献[2] 定义 r 边形数:对于任意的正整数 m,称自然数 $(1/2)(2m+m(m-1)(r-2))$ $(r\geqslant 3)$ 为 r 角形数,是因为这些数目的点子可以排成一个 r 边形,记为 $S(m,r)$.

文献[6] 同时定义了整数 n 的 r 边形数函数(部分数列):

上部 r 边形数部分数列: $u_r(n)=\min\{m+(1/2)m(m-1)(r-2): n\leqslant m+(1/2)m(m-1)(r-2), r\in\mathbf{N}^+, r\geqslant 3\}$,

下部 r 边形数部分数列: $v_r(n)=\max\{m+(1/2)m(m-1)(r-2): n\geqslant m+(1/2)m(m-1)(r-2), r\in\mathbf{N}^+, r\geqslant 3\}$.

收稿日期:2010-12-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省自然科学基金资助项目(2009JQ1009)资助

作者简介:黄炜(1961-),男,陕西省岐山县人,宝鸡职业技术学院教授. E-mail: wphuangwei@163.com

关于 $SL(u_r(n))$,$SL(v_r(n))$ 的初等性质,目前还没有人研究,本文采用文献[6]的思想,用初等和解析方法方法,结合素数函数 $\pi(x)$ 的解析性质,研究了 $SL(u_r(n))$,$SL(v_r(n))$ 的均值分布性质,并给出了一个有趣的渐近公式,即就是证明以下结论:

定理 1　设 k 是给定正整数,$\forall x \in \mathbf{R}_+, x > 1$,有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} SL(u_r(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot (2(r-2)x)^{3/2}}{\ln^i \sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1} x}\right), \quad (\text{I})$$

$$\sum_{n \leqslant x} SL(v_r(n)) = \frac{\pi^2}{18(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot (2(r-2)x)^{3/2}}{\ln^i \sqrt{\frac{2x}{r-2}}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1} x}\right), \quad (\text{II})$$

其中　c_i　$(i = 1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

特别的当 $r = 3$ 时,有下面的结论

推论 1　设 k 是给定正整数,$\forall x \in \mathbf{R}_+, x > 1$,有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} SL(u_r(n)) = \frac{\pi^2}{18} \frac{(2x)^{3/2}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot (2x)^{3/2}}{\ln^i \sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1} x}\right), \quad (\text{III})$$

$$\sum_{n \leqslant x} SL(v_r(n)) = \frac{\pi^2}{18} \frac{(2x)^{3/2}}{\ln\sqrt{2x}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot (2x)^{3/2}}{\ln^i \sqrt{2x}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1} x}\right), \quad (\text{IV})$$

其中　c_i　$(i = 1,2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数.

2　引理及其证明

引理 1　$\forall x \in \mathbf{R}_+, x \geqslant 1$,设 $\pi(x) = \sum_{p \leqslant n} 1$,由 Abel 求和公式[8]及素数定理,有渐近公式

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right).$$

其中　$c_i = (i-1)!$　$(i = 1,2,3,\cdots,k)$.

引理 1 的证明可参阅文献[8].

引理 2　设 p 是素数,则有 $\sum_{p \leqslant x} p^2 = \frac{1}{3} x^3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right)$.

证明　由 Abel 求和公式[8]及引理 1,有

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leqslant x} p^2 &= \int_{2/3}^{x} t^2 \mathrm{d}\pi(t) = x^2 \cdot \pi(x) - 2\int_{2/3}^{x} t\pi(t)\,\mathrm{d}t = \\
& x^2 \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot x}{\ln^i x} + O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right)\right) - 2\int_{2/3}^{x} t \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i \cdot t}{\ln^i t} + O\left(\frac{t}{\ln^{k+1} t}\right)\right) \mathrm{d}t = \\
& x^3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} - \frac{2}{3} x^3 \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right) = \\
& \frac{1}{3} x^3 \sum_{I=1}^{k} \frac{a_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^3}{\ln^{k+1} x}\right).
\end{aligned}$$

于是完成了引理 2 的证明.

引理 3　$\forall n \in \mathbf{R}_+, n > 1$,设 $S(m+1,r) = 1/2((m+1) + m(m+1)(r-2))$,则有渐近公式

$$m = \frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2} + O(1).$$

证明见文献[6].

3　定理的证明

在 $\sum_{p \leqslant x} SL(u_r(n))$ 中,$\forall n \in \mathbf{R}_+, n > 1$,当

$$(1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2)) \leqslant n \leqslant (1/2)(2(m+1)+m(m+1)\cdot(r-2))$$

时,方程 $u_r(n) = (1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2))$ 有 $(r-2)m+1$ 个解,分别为

$$(1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2)),$$
$$(1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+1,$$
$$(1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+2,$$
$$\cdots$$
$$(1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+(r-2)m,$$

即 $u_r((1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2))+j) = (1/2)(2m+m(m-1)\cdot(r-2)), j=0,1,2,\cdots,(r-2)m.$

由于 $n \leqslant x$,所以由引理1知当 $v(n)=m$ 时,m 满足

$$1 \leqslant m \leqslant \frac{(r-4)+\sqrt{(r-4)^2+8(r-2)n}}{2(r-2)},$$

亦即 $m = \frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2} + O(1)$,于是注意到 $SL(p) \leqslant n, m \in \mathbf{N}_+$,有

$$\sum_{n \leqslant x} SL(u_r(n)) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ u_r(n)=m}} SL(m) = \sum_{m \leqslant \sqrt{2(r-2)x}/(r-2)} m \cdot SL(m) + O(x) =$$
$$\sum_{m \leqslant \sqrt{2x/(r-2)}} m \cdot SL(m) + O(x). \tag{2}$$

现将区间 $[1, \sqrt{2(r-2)x}/(r-2)]$ 内的所有正整数,分成2个集合 A, B,其中 A 是满足那些存在素数 p,使得 $p \mid n$,且 $p > \sqrt{m}$ 的正整数 m 的集合;而 B 是包含区间 $[1, \sqrt{2(r-2)x}/(r-2)]$ 中不属于集合 A 的那些正整数 m 的集合;于是利用性质(1),有 $\sum_{m \leqslant \sqrt{2x/(r-2)}} m \cdot SL(m) = \sum_{m \in A} m \cdot SL(m) + \sum_{m \in B} m \cdot SL(m)$.

(1)集合 A 的情况.

$$\sum_{n \in A} m \cdot SL(m) = \sum_{\substack{m \leqslant \sqrt{2(r-2)x}/(r-2) \\ p \mid m, \sqrt{m} < p}} m \cdot SL(m) = \sum_{\substack{mp \leqslant \sqrt{2(r-2)x}/(r-2) \\ m<p}} mp \cdot SL(mp) =$$
$$\sum_{\substack{mp \leqslant \sqrt{2(r-2)x}/(r-2) \\ m<p}} mp \cdot p = \sum_{m \leqslant \sqrt{2x/(r-2)}} m \sum_{m < p \leqslant \frac{\sqrt{2x/(r-2)}}{m}} p^2. \tag{3}$$

由引理2有

$$\sum_{m < p \leqslant \frac{\sqrt{2(r-2)x}}{m(r-2)}} p^2 = \frac{1}{3(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{m^3 \ln \sqrt{2x/(r-2)}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{b_i (2(r-2)x)^{3/2} \ln^i m}{m^3 \ln^i \sqrt{2x/(r-2)}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{m^3 \ln^{k+1} x}\right). \tag{4}$$

其中 $b_i \ (i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算常数,并注意到 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$,由式(3)、(4)可以推断

$$\sum_{n \in A} m \cdot SL(m) = \frac{1}{3(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln \sqrt{2x/(r-2)}} \sum_{m \leqslant \sqrt{2n/(r-2)}} \frac{1}{m^2} +$$
$$\sum_{m \leqslant \sqrt{2n/(r-2)}} \sum_{i=2}^{k} \frac{a_i \cdot (2(r-2)x)^{3/2} \ln^i m}{m^2 \ln^i \sqrt{2x/(r-2)}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1} x}\right) =$$
$$\frac{\pi^2}{18(r-2)^3} \frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln \sqrt{2x/(r-2)}} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot (2(r-2)x)^{3/2}}{\ln^i \sqrt{2x/(r-2)}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1} x}\right). \tag{5}$$

其中 $c_1 = 1, c_i \ (i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数.

(2)集合 B 的情况. 由式(1)及集合 B 的定义知,$\forall m \in B$,若它的标准素因数分解式是 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$,于是由式(1)有

$$\sum_{n \in B} m \cdot SL(m) \leqslant \sum_{\substack{m \leqslant \sqrt{2x/(r-2)} \\ SL(m)=p, p \leqslant \sqrt{m}}} mp + \sum_{\substack{m \leqslant \sqrt{2x/(r-2)} \\ SL(m)=p^\alpha, \alpha>1}} mp^\alpha \leqslant$$
$$\sum_{\substack{m \leqslant \sqrt{\frac{2x}{r-2}} \\ SL(m)=p, p \leqslant \sqrt{m}}} mp + \sum_{2 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}\ln\frac{2x}{r-2}} \sum_{p \leqslant \sqrt{\frac{2x}{r-2}}} \sum_{mp^\alpha \leqslant \sqrt{\frac{2x}{r-2}}} mp^{2\alpha} \leqslant$$

$$\sum_{m\leqslant\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} m \sum_{p\leqslant\min\left\{m,\sqrt{\frac{2x}{r-2}}\right\}} p + \sum_{2\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}\ln\frac{2x}{r-2}} \sum_{m\leqslant\sqrt{\frac{2x}{r-2}}} m \sum_{p^{\alpha}\leqslant\sqrt{\frac{2x}{r-2}}/m} p^{2\alpha} \leqslant$$

$$x^{5/4} + x\ln^{3}\frac{2x}{r-2} \leqslant x^{5/4}\ln x \leqslant x^{5/4+\varepsilon}. \tag{6}$$

由集合 A,B 的定义及式(2),(5),(6)有

$$\sum_{n\leqslant x} SL(u_r(n)) = \sum_{m\leqslant\sqrt{2x/(r-2)}} m\cdot SL(m) + O(x) =$$

$$\sum_{n\in A} m\cdot SL(m) + \sum_{n\in B} m\cdot SL(m) + O(x) =$$

$$\frac{\pi^{2}}{18(r-2)^{3}}\frac{(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln\sqrt{2x/(r-2)}} + \sum_{i=2}^{k}\frac{c_i\cdot(2(r-2)x)^{3/2}}{\ln^{i}\sqrt{2x/(r-2)}} + O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 $c_1=1$,c_i $(i=2,3,\cdots,k)$ 是可计算的常数,这就完成了定理1(Ⅰ)的证明.

用同样的方法可给出定理1(Ⅱ)的证明.

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems,not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House,1993.
[2] SUBRAMAMAM KB. A generalization of triangular numbers [J]. Internat J Math Ed Sci Tech,1992,23:790-793.
[3] LE Maohua. An equation concerning Smarandache LCM function [J]. Notions Journal,2004,14(2):186-188.
[4] 赵院娥,关于Smarandache LCM函数的一类均方差问题 [J]. 纯粹数学与应用数学,2008,24(1):71-74.
[5] 黄炜. 关于 r 角形数的部分数列及其均值 [J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2010,35(1):15-18.
[6] 黄炜,赵教练. 关于Smarandach平方根部分数列 $a_2(n)$ 和 $b_2(n)$ [J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(6):52-54.
[7] 黄炜. 一个包含Smarandache函数的复合函数的均值 [J]. 科学技术与工程,2009,39(16):5 432-5 434.
[8] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海:上海科学技术出版社,1988.

Hybrid mean value estimate for two Smarandache LCM functions

HUANG Wei

(Department of Basis, Baoji Vocational and Technical College,Baoji,Shaanxi 721013,China)

Abstract: The hybrid mean value problem involving the F. Smarandache LCM function $SL(n)$ and the r angular number function $u_r(n)$ and $v_r(n)$ is studied. By using the elementary method and analytic method,Two sharper asymptotic formulae are given. The relevant researhc work of F. Smarandache professor in book《only Problems Not Solution》is developed.

Key words: Smarandache LCM function; r angular number function; hybrid mean value; asymptotic formula

编辑、校对:黄燕萍